Лекция 14

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1 Комплексная случайная величина **1**
1.1 Характеристические функции стандартных распределений . . . 2
1.1.1 Распределение Бернулли . . . 2
1.1.2 Биномиальное распределение . . . 2
1.1.3 Распределение Пуассона . . . 3
1.1.4 Гамма распределение . . . 3
1.1.5 Экспоненциальное распределение . . . 3
1.1.6 Стандартное нормальное распределение . . . 3
1.1.7 Нормальное распределение . . . 3
1.2 Доказательство основных теорем . . . 4
1.3 Предельная теорема Муавра-Лапласа . . . 4

1 Комплексная случайная величина

$$\xi + i\eta$$
$$E(\xi + i\eta) = E\xi + iE\eta$$

Определение. Характеристической функцией случайной величины ξ называется функция

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} \quad t \in \mathbb{R}$$

Свойство 1. *Характеристическая функция существует для любой случайной величины, при чем*

$$|\varphi_\xi(t)| \leq 1$$

Доказательство.

$$D\eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 \geq 0 \implies (E\eta)^2 \leq E\eta^2$$
$$|\varphi_\xi(t)|^2 = |Ee^{it\xi}|^2 = |E\cos t\xi + iE\sin t\xi|^2 = (E\cos t\xi)^2 + (E\sin t\xi)^2 \leq$$
$$\leq E\cos^2 t\xi + E\sin^2 t\xi = E(\cos^2 t\xi + \sin^2 t\xi) = E1 = 1$$

□

Свойство 2. *Пусть $\varphi_\xi(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ, тогда характеристическая функция случайной величины $\eta = a + b\xi$:*

$$\varphi_{a+b\xi}(t) = e^{ita} \cdot \varphi_\xi(bt)$$

Доказательство.

$$\varphi_{a+b\xi}(t) = Ee^{it(a+b\xi)} = Ee^{ita} \cdot e^{itb\xi} = e^{ita} \cdot Ee^{i(tb)\xi} = e^{ita} \cdot \varphi_\xi(bt)$$

□

Свойство 3. *Пусть случайная величины ξ и η независимы, тогда*

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t) \cdot \varphi_\eta(t)$$

Доказательство.

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = Ee^{it(\xi+\eta)} = Ee^{it\xi} \cdot e^{it\eta} = Ee^{it\xi} \cdot Ee^{it\eta} = \varphi_\xi(t) \cdot \varphi_\eta(t)$$

□

Свойство 4. *Пусть существует k-тый момент случайной величины ξ, тогда характеристическая функция $\varphi_\xi(t)$ непрерывно дифференцируема k раз и*

$$\varphi_\xi^{(k)}(0) = i^k \cdot E\xi^k$$

Доказательство. Доказательство существования непрерывности опустим

$$\varphi_\xi^{(k)}(0) = \left(\frac{\partial^k}{\partial t^k} Ee^{it\xi}\right) = E\left(\frac{\partial^k}{\partial t^k} e^{it\xi}\right) = E(i^k\xi^k e^{it\xi}) \underset{t=0}{=\!=} E(i^k\xi^k e^0) = i^k \cdot E\xi^k$$

□

Свойство 5. *Пусть $E|\xi|^k < \infty$. Тогда*

$$\varphi_\xi(t) = \varphi_\xi(0) + itE\xi - \frac{t^2}{2}E\xi^2 + \dots + \frac{i^k t^k}{k!}E\xi^2 + o(|t|^k)$$

Доказательство. По формуле Тейлора в точке $t = 0$

$$\varphi_\xi(t) = \varphi_\xi(0) + \frac{\varphi'_\xi(0)}{1!}t + \frac{\varphi''_\xi(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{\varphi_\xi^{(k)}}{k!}t^k + o(|t|^2) =$$

$$= \varphi_\xi(0) + itE\xi - \frac{t^2}{2}E\xi^2 + \dots + \frac{i^k t^k}{k!}E\xi^k + o(|t|^2)$$

□

Свойство 6. *Распределение случайной величины восстанавливается по характеристической функции, т.е. существует взаимно однозначное соответствие между распределениями и характеристическими функциями. В частности если ξ — абсолютно непрерывная случайная величина, то плотность:*

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \cdot \varphi_\xi(t)\, dt$$

Теорема 1.1 (о непрерывном соответсвии)**.** Последовательность случайных величин ξ_n слабо сходится к случайной величине ξ, тогда и только тогда, когда соответствующая последовательность характеристических функций поточечно сходится к характеристической функции $\varphi_\xi(t)$

$$\xi_n \rightrightarrows \xi \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}\ \varphi_{\xi_n}(t) \to \varphi_\xi(t)$$

1.1 Характеристические функции стандартных распределений

1.1.1 Распределение Бернулли

$\xi \in B_p$

ξ	0	1
η	$1-p$	p

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = e^{it\cdot 0}p(\xi = 0) + e^{it1} \cdot p(\xi = 1) = 1 - p + pe^{it}$$

1.1.2 Биномиальное распределение

$\xi \in B_{n,p}$ — число успехов при n независимых испытаниях

$$\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n$$

, где $\xi_i = B_p$ — число успехов при одном испытании

$$\varphi_\xi(t) = (1 - p + e^{it})^n$$

1.1.3 Распределение Пуассона

$\xi \in \Pi_\lambda$

$$p(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{itk} \cdot p(\xi = k) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = \exp(\lambda(e^{it} - 1)) \quad \boxed{\text{Исправить}}$$

Свойство 1. *Если $\xi \in \Pi_\lambda$, $\eta \in \Pi_\mu$ — независимые случайные величины, то $\xi + \eta = \Pi_{\lambda+\mu}$*

Доказательство.

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t) \cdot \varphi_\eta(t) = \exp(\lambda(it - 1)) \cot \exp(\mu(it - 1)) = \exp((\lambda + \mu)(it - 1))$$

По свойству 6 □

1.1.4 Гамма распределение

$\xi \in \Gamma_{\alpha,\lambda}$

$$f_\xi(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} \quad x > 0$$

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \boxed{\text{Доделать}} = \left(\frac{\alpha}{\alpha - it}\right)^\lambda$$

1.1.5 Экспоненциальное распределение

$\xi \in E_\alpha = \Gamma_{\alpha,\lambda}$

$$\varphi_\xi(t) = \frac{\alpha}{\alpha - it}$$

Следствие 1.1.1. Пусть $\xi \in \Gamma_{\alpha,\lambda_1}$, $\eta \in \Gamma_{\alpha,\lambda_2}$ — независимые случайные величины
Тогда $\xi + \eta \in \Gamma_{\alpha,\lambda_1+\lambda_2}$

1.1.6 Стандартное нормальное распределение

$\xi \in N_{0,1}$

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\varphi_\xi(t) = \boxed{\text{Доделать}} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

1.1.7 Нормальное распределение

$\xi \in N_{a,\sigma^2}$

$$\eta = \frac{\xi - a}{\sigma} \in N(0,1) \quad \xi = a + \sigma\eta$$

$$\varphi_\xi(t) = \varphi_{a+\sigma\eta}(t) = e^{ita} \cdot \varphi_\eta(\sigma t) = e^{ita} \cdot e^{-\frac{\text{()}^2}{2}}$$

Следствие 1.1.2. $\xi \in N(a_1, \sigma_1^2)$, $\eta \in N(a_2, \sigma_2^2)$ — независимые случайные величины Тогда

$$\xi + \eta N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

1.2 Доказательство основных теорем

Лемма 1.

$$\left(1+\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^x$$

Теорема 1.2. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным первым моментом a.
Тогда

$$\frac{S_n}{n} = \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \xrightarrow{p} a$$

Теорема 1.3. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией. $a = E\xi_1$, $\sigma^2 = D\xi_1$.
Тогда

$$\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \rightrightarrows N_{0,1}$$

Доказательство. Доделать □

1.3 Предельная теорема Муавра-Лапласа

Теорема 1.4.

- $\nu_n(A)$ — число появления события A при n испытаниях
- p — вероятность одного испытания
- $q = 1 - p$

Тогда

$$\frac{\nu_n(A) - np}{\sqrt{npq}} \rightrightarrows N_{0,1}$$

[формула Муавра-Лапласа]

$$p(x_1 \le \nu_n \le x_2) = p\left(\frac{x_1 - np}{\sqrt{npq}} \le \underbrace{\frac{\nu_n - np}{\sqrt{npq}}}_{\eta} \le \frac{x_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= F_\eta\left(\frac{x_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) \cdot F_\eta\left(\frac{x_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi_0\left(\frac{x_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) \cdot \Phi_0\left(\frac{x_2 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Примечание. Аналогичным образом ЦПТ(центральная предельная теорема) применяется при приближенных оценках вероятностей связанных с суммами большого числа независимых случайных величин. Какова погрешность?

Теорема 1.5. В условиях ЦПТ, ?? с конечным третьим моментом

$$\left|p\left(\frac{S_n - E\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}}\right) - \Phi_0(x)\right| \le C\frac{E|\xi_1 - E\xi_1|^2}{\sqrt{n}(\sqrt{D\xi_1})^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Примечание. Можно взять $C = 0.4$