Лекция 1

Ilya Yaroshevskiy

9 февраля

Содержание

1 Общие определения **1**

2 Семантика большого шага. Определения **2**

1 Общие определения

Определение. Язык программирования — набор слов из алфавита

Примечание. Чем отличается язык программирования от естественных языков? Единственное отличие — строгость и некоторая формальная модель вычисления програм.

Определение. Способы задасть синтаксис языка:

- **Грамматика** — набор правил по генерации высказываний в языке
- **Набор слов**
  Например: $L = \varnothing$

Определение. Способы задать семантику:

- Функция по слову $\to$ функция «делания»

$$[\![\cdot]\!] : \; L \to \underbrace{(\texttt{input} \to \texttt{output})}_{\textbf{Семантический домен}}$$

- Примерами

```
print("Hello world!")
b = 6
a = 5 + b
print(a)
```

  Печатает текст, складывает числа, и т.д.

- Интепретатор: $L \times \texttt{input} \to \texttt{output}$
- Компилятор: $L \to L'$

Примечание. Зачем нужна **формальная** семнатика:

- Доказательство корректности
- Программисту
  Например: Java Memory Model
- Разработчику языка или компилятора: *Например*: доказательсво корректности оптимизации, проводимой компилятором

Примечание.

```
int x = 1;
int a = x++ + x++ + x++ + x++;
```

Undefined behaviour — любая семантика

Примечание. Рассмотрим программу, которая исполняется в два потока:

```
[x] := 1;
a := [y];

[y] := 1;
b := [x];
```

Возможны все четыре варианта, чему буду равны `a` и `b` после завершения

2 Семантика большого шага. Определения

Определение. Грамматика выражений:

$$e \in \mathbb{E} ::= z \in \mathbb{Z} \mid X \in \mathbb{V} \mid e \operatorname{binop} e$$

$$\operatorname{binop} ::= \oplus \mid \ominus \mid \otimes \mid \ldots$$

Определение.

$$\frac{}{\left\langle \underbrace{\sigma}_{\text{контекст}}, \underbrace{e}_{\text{выражение}} \right\rangle \to \underbrace{x}_{\text{«число»}}}$$

$$\frac{}{\langle \sigma, z \rangle \to z} \text{ — константа}$$

$$\frac{\langle X, z \rangle \in_1 \sigma}{\langle \sigma, X \rangle \to z} \text{ — переменная}$$

$$\frac{\langle \sigma, e_1 \rangle \to z_1 \quad \langle \sigma, e_2 \rangle \to z_2}{\langle \sigma, e_1 \oplus e_2 \rangle \to z_1 + z_2}$$

$$\frac{\langle \sigma, e_1 \rangle \to z_1 \quad \langle \sigma, e_2 \rangle \to z_2 \quad z_2 \neq 0}{\langle \sigma, e_1 \divideontimes e_2 \rangle \to z_1 \div z_2}$$

$$\frac{\langle \sigma, e_1 \rangle \to z_1 \quad \langle \sigma, e_2 \rangle \to z_2 \quad z_1 < z_2}{\langle \sigma, e_1 e_2 \rangle \to 1}$$

$$\frac{\langle \sigma, e_1 \rangle \to z_1 \quad \langle \sigma, e_2 \rangle \to z_2 \quad z_1 \geq z_2}{\langle \sigma, e_1 e_2 \rangle \to 0}$$

$$\frac{\langle \sigma, e_1 \rangle \to z_1 \quad \langle \sigma, e_2 \rangle \to z_2 \quad \{z_1, z_2\} \in \{0, 1\}}{\langle \sigma, e_1 e_2 \rangle \to z_1 \wedge z_2}$$

$$\frac{\langle \sigma, e_1 \rangle \to z_1 \quad \langle \sigma, e_2 \rangle \to z_2 \quad \{z_1, z_2\} \in \{0, 1\}}{\langle \sigma, e_1 e_2 \rangle \to z_1 \vee z_2}$$

Нестрогая семантика: $\dfrac{\langle \sigma, e_1 \rangle \to z_1 \quad z_1 = 0}{\langle \sigma, e_1 e_2 \rangle \to 0} \quad \dfrac{\langle \sigma, e_1 \rangle -> z_1 \quad \langle \sigma, e_2 \rangle \to z_2 \quad z_1 = 1}{\langle \sigma, e_1 e_2 \rangle \to z_2}$

Определение. $e_0 \approx e_1$ тогда и только тогда, когда

$$\forall z \in \mathbb{Z}, \sigma \in \Sigma. \langle \sigma, e_0 \rangle \to z \Leftrightarrow \langle \sigma, e_1 \rangle \to z$$

Пример.

- $0 < 1 \approx 2 < 3$
- $a + b \approx b + a$
- $\forall e. e \approx e$
- $a \approx b \wedge b \approx c \Rightarrow a \approx c$

- $1 + 2 + 3 \approx 6$

Пример.

```
let cfold e : E :=
  match e with
  | z => z
  | X => X
  | e1 op e2 =>
      let c1 = cfold e1 in
      let c2 = cfold e2 in
      match c1, c2 with
      | z1, z2 => apply op z1 z2
      | _. _ => c1 op c2
      end
  end.

Lem. forall e in E. cfold e equiv e
```

Примечание. Индукция по $\mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}.P(n) \Leftrightarrow P(0) \wedge (\forall n.P(n) \Rightarrow P(n+1))$$

Пример.

$$P(n) \stackrel{\triangle}{=} f(n) = n\%3$$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1) &= 1 \\ f(2) &= 2 \\ f(n) &= f(n-3) \end{aligned}$$

Хотим $\stackrel{?}{\Longleftrightarrow} \forall n.(\forall k < n.P(k)) \Rightarrow P(n)$. Фиксируем n и хотим показать $(\forall k < n.P(k)) \Rightarrow P(n)$:

- $n = 0, 1, 2$ все хорошо
- $n \geq 3 : f(n) = f(n-3)$, по предположению $P(n-3)$ и $P(n) \Leftrightarrow P(n-3)$

Примечание. $n \in \mathbb{N} ::= 0 \mid n'$

Определение. Индукция по $\mathbb{Z}$

$$\forall z \in \mathbb{Z}.P(z) \Leftrightarrow P(0) \wedge (\forall z > 0.P(z) \Rightarrow P(z+1)) \wedge (\forall z < 0.P(z) \Rightarrow P(z-1))$$

Определение.

$$z \in \mathbb{Z} ::= 0 \mid \ +n \mid \ -n$$

Определение. Структурная индукция по $\mathbb{E}$

$$(\forall e \in \mathbb{E}.P(e)) \Leftrightarrow (\forall z \in \mathbb{Z}.P(z)) \wedge (\forall x \in \mathbb{V}.P(x)) \wedge (\forall e_1, e_2 \in \mathbb{E}.P(e_1) \wedge P(e_2) \Rightarrow P(e_1 \operatorname{op} e_2))$$